

Calculer avec Sage

Alexandre Casamayou Guillaume Connan Thierry Dumont
Laurent Fousse François Maltey Matthias Meulien
Marc Mezzarobba Clément Pernet Nicolas Thiéry
Paul Zimmermann

Revision : 417 du 1^{er} juillet 2010

Cet ouvrage est diffusé sous la licence Creative Commons « Paternité-Partage des Conditions Initiales à l'Identique 2.0 France ». Extrait de <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/> :

Vous êtes libres :

- de reproduire, distribuer et communiquer cette création au public,

- de modifier cette création ;

selon les conditions suivantes :

- Paternité. Vous devez citer le nom de l'auteur original de la manière indiquée par l'auteur de l'œuvre ou le titulaire des droits qui vous confère cette autorisation (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'œuvre).

- Partage des Conditions Initiales à l'Identique. Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette création, vous n'avez le droit de distribuer la création qui en résulte que sous un contrat identique à celui-ci.

À chaque réutilisation ou distribution de cette création, vous devez faire apparaître clairement au public les conditions contractuelles de sa mise à disposition. La meilleure manière de les indiquer est un lien vers cette page web. Chacune de ces conditions peut être levée si vous obtenez l'autorisation du titulaire des droits sur cette œuvre. Rien dans ce contrat ne diminue ou ne restreint le droit moral de l'auteur ou des auteurs.

Des parties de cet ouvrage sont inspirées de l'ouvrage **CALCUL FORMEL : MODE D'EMPLOI. EXEMPLES EN MAPLE** de Philippe Dumas, Claude Gomez, Bruno Salvy et Paul Zimmermann [DGSZ95], diffusé sous la même licence, notamment les sections 1.6 et 2.1.2, et la section 2.3.5.

Une partie des exemples Sage de la section 12 sont tirés du tutoriel de MuPAD-Combinat [HT04] et Sage-combinat. Le dénombrement des arbres binaires complets de § 12.1.2 est en partie inspiré d'un sujet de TP de Florent Hivert.

L'exercice 9 sur le problème de Gauss est tiré d'un problème de François Pantigny et l'exercice 17 sur l'effet Magnus est extrait d'un TD de Jean-Guy Stoliaroff.

Préface

Ce livre est destiné à tous ceux qui désirent utiliser efficacement un système de calcul formel, en particulier le logiciel Sage. Les systèmes de calcul formel disposent d'une multitude de fonctionnalités, et trouver comment résoudre un problème donné n'est pas toujours facile. En effet, l'aide en ligne fournie par ces logiciels suppose en général que l'utilisateur connaît déjà la commande à utiliser ! Parfois même il existe plusieurs solutions pour un problème donné, qui ne sont pas toutes aussi efficaces. Notre objectif est de guider l'utilisateur dans cette jungle.

La première partie, plus spécifique au logiciel Sage, constitue une prise en main du système. Cette partie se veut accessible aux élèves de lycée, et donc a fortiori aux étudiants de BTS et de licence. Les autres parties s'adressent à des étudiants au niveau agrégation, et sont d'ailleurs organisées en suivant le programme de l'épreuve de modélisation de l'agrégation de mathématiques. Contrairement à un manuel de référence, les concepts mathématiques sont clairement énoncés avant d'illustrer leur mise en œuvre avec Sage. Ce livre est donc aussi un livre sur les mathématiques.

Pour illustrer cet ouvrage, le choix s'est porté naturellement vers Sage, car c'est un logiciel libre, que tout un chacun peut librement utiliser, modifier et redistribuer. Sage est un logiciel encore jeune par rapport aux autres logiciels de calcul formel, et malgré ses capacités déjà étendues, comporte encore de nombreuses *bogues*. Mais par sa communauté très active de développeurs, Sage évolue très vite. Chaque utilisateur de Sage peut rapporter une bogue — et éventuellement sa solution — sur trac.sagemath.org ou via la liste sage-support.

Quand j'ai proposé en décembre 2009 à Alexandre Casamayou, Guillaume Connan, Thierry Dumont, Laurent Fousse, François Maltey, Matthias Meulien, Marc Mezzarobba, Clément Pernet et Nicolas Thiéry d'écrire un livre sur Sage, tous ont répondu présent, malgré une charge de travail déjà importante. Je tiens à les remercier, notamment pour le respect du planning serré que j'avais fixé.

Je tiens aussi à remercier les personnes suivantes qui ont relu une version préliminaire de ce livre : Gaëtan Bisson, Françoise Jung ; ainsi qu'Emmanuel Thomé pour son aide précieuse lors de la réalisation de ce livre.

En rédigeant ce livre, nous avons beaucoup appris sur Sage, nous avons bien sûr rencontré quelques bogues, dont certaines sont déjà corrigées. Nous espérons que ce livre sera utile à d'autres, lycéens, étudiants, professeurs, ingénieurs, chercheurs, ... Nous attendons en retour du lecteur qu'il nous fasse part de toute erreur, critique ou suggestion pour une version ultérieure.

Villers-lès-Nancy, France
juin 2010

Paul Zimmermann

Table des matières

I	Prise en main du logiciel	11
1	Premiers pas avec Sage	13
1.1	Le logiciel Sage	13
1.1.1	Un outil pour les mathématiques	13
1.1.2	Accès à Sage	14
1.2	Premier calcul, aide en ligne et complétion	15
1.3	Syntaxe générale	16
1.4	Variables	18
1.4.1	Variables et affectations	18
1.4.2	Variables symboliques	19
1.5	Calcul formel et méthodes numériques	20
1.6	Classes et classes normales	21
1.7	Les classes élémentaires	22
1.8	Autres classes à forme normale	26
2	Analyse et algèbre avec Sage	29
2.1	Simplification d'expressions symboliques	29
2.1.1	Expressions symboliques et fonctions symboliques	29
2.1.2	Expressions complexes et simplification	31
2.1.3	Hypothèses sur une variable symbolique	34
2.2	Équations	34
2.3	Analyse	37
2.3.1	Sommes et produits	37
2.3.2	Limites	39
2.3.3	Suites	39
2.3.4	Développements limités	41
2.3.5	Séries	43
2.3.6	Dérivation	44
2.3.7	Dérivées partielles	45

2.3.8	Intégration	45
2.3.9	Récapitulatif des fonctions utiles en analyse	47
2.4	Algèbre linéaire élémentaire	47
2.4.1	Résolution de systèmes linéaires	47
2.4.2	Calcul vectoriel	48
2.4.3	Calcul matriciel	49
3	Programmation et structures de données	51
3.1	Algorithmique	52
3.1.1	Les boucles	52
3.1.2	Les tests	58
3.1.3	Les procédures et les fonctions	60
3.1.4	Algorithme d'exponentiation rapide	63
3.1.5	Affichage et saisie	66
3.2	Listes et structures composées	67
3.2.1	Définition des listes et accès aux éléments	67
3.2.2	Opérations globale sur les listes	69
3.2.3	Principales méthodes sur les listes	73
3.2.4	Exemples de manipulations de listes	75
3.2.5	Chaînes de caractères	76
3.2.6	Structure partagée ou dupliquée	77
3.2.7	Données modifiables ou immuables	79
3.2.8	Ensembles finis	80
3.2.9	Dictionnaires	81
4	Graphiques	83
4.1	Courbes en 2D	83
4.1.1	Représentation graphique de fonctions	83
4.1.2	Courbes paramétrées	87
4.1.3	Courbes en coordonnées polaires	88
4.1.4	Courbe définie par une équation implicite	88
4.1.5	Tracé de données	90
4.1.6	Tracé de solution d'équation différentielle	94
4.1.7	Développée d'une courbe	99
4.1.8	Récapitulatif des fonctions graphiques	101
4.2	Courbes en 3D	103

II	Calcul numérique	107
5	Algèbre linéaire numérique	109
5.1	Calculs inexacts en algèbre linéaire	110
5.2	Matrices pleines	113
5.2.1	Résolution de systèmes linéaires	113
5.2.2	Résolution directe	114
5.2.3	La décomposition LU	115
5.2.4	La décomposition de Cholesky des matrices réelles symétriques définies positives	115
5.2.5	La décomposition QR	116
5.2.6	La décomposition en valeurs singulières	117
5.2.7	Application aux moindres carrés	117
5.2.8	Valeurs propres, vecteurs propres	122
5.2.9	Ajustement polynomial : le retour du diable	128
5.2.10	Implémentation et performances (pour les calculs avec des matrices pleines)	131
5.3	Grandes matrices creuses	132
5.3.1	Origine des systèmes creux	132
5.3.2	Grandes matrices creuses et Sage	133
5.3.3	Résolution de systèmes linéaires	134
5.3.4	Valeurs propres, vecteurs propres	136
6	Intégration numérique et équations différentielles	139
6.1	Intégration numérique	139
6.1.1	Manuel des fonctions d'intégration disponibles	146
6.2	Équations différentielles numériques	153
6.2.1	Exemple de résolution	155
6.2.2	Fonctions de résolution disponibles	156
7	Équations non linéaires	161
7.1	Équations algébriques	161
7.2	Résolution numérique	168
7.2.1	Localisation des solutions des équations algébriques	169
7.2.2	Méthodes d'approximations successives	171
III	Algèbre et calcul formel	187
8	Corps finis et théorie des nombres	191

8.1	Anneaux et corps finis	191
8.1.1	Anneau des entiers modulo n	191
8.1.2	Corps finis	194
8.1.3	Reconstruction rationnelle	195
8.1.4	Restes chinois	196
8.2	Primalité	197
8.3	Factorisation et logarithme discret	200
8.4	Applications	202
8.4.1	La constante δ	202
8.4.2	Calcul d'intégrale multiple via reconstruction rationnelle	203
9	Polynômes	205
9.1	Polynômes à une indéterminée	206
9.1.1	Anneaux de polynômes	206
9.1.2	Représentation dense et représentation creuse	210
9.1.3	Arithmétique euclidienne	212
9.1.4	Polynômes irréductibles et factorisation	214
9.1.5	Racines	216
9.1.6	Ideaux et quotients de $A[x]$	220
9.1.7	Fractions rationnelles	221
9.1.8	Séries	227
9.2	Polynômes à plusieurs indéterminées	232
9.2.1	Anneaux de polynômes à plusieurs indéterminées	232
9.2.2	Polynômes à plusieurs indéterminées	234
10	Algèbre linéaire	239
10.1	Constructions et manipulations élémentaires	239
10.1.1	Espace de vecteurs, de matrices	239
10.1.2	Constructions des matrices et des vecteurs	241
10.1.3	Manipulations de base sur les matrices	242
10.1.4	Opérations de base sur les matrices	245
10.1.5	Les différentes classes de matrices spécialisées	245
10.2	Calculs sur les matrices	245
10.2.1	Élimination de Gauss, forme échelonnée	246
10.2.2	Résolution de systèmes et base du noyau	252
10.2.3	Valeurs propres, forme de Jordan et transformations de similitude	255

11 Équations différentielles	265
11.1 Introduction	265
11.2 Équations différentielles ordinaires d'ordre 1	266
11.2.1 Commandes de base	266
11.2.2 Équation linéaire	266
11.2.3 Équations à variables séparables	267
11.2.4 Équations homogènes	271
11.2.5 Autres équations classiques	273
11.2.6 Une équation à paramètres : le modèle de Verhulst	274
11.3 Équations d'ordre 2	275
11.3.1 Équations linéaires à coefficients constants	275
11.3.2 Sage mis en défaut ?	276
11.4 Transformée de Laplace	278
11.4.1 Rappel	278
11.4.2 Exemple	278
IV Probabilités, combinatoire et statistiques	281
12 Dénombrement et combinatoire	283
12.1 Premiers exemples	284
12.1.1 Jeu de Poker et probabilités	284
12.1.2 Dénombrement d'arbres par séries génératrices	287
12.2 Ensembles énumérés usuels	292
12.2.1 Premier exemple : les sous-ensembles d'un ensemble	292
12.2.2 Partitions d'entiers	293
12.2.3 Quelques autres ensembles finis énumérés	296
12.2.4 Compréhensions et itérateurs	299
12.3 Constructions	307
12.3.1 Résumé	309
12.4 Algorithmes génériques	309
12.4.1 Génération lexicographique de listes d'entiers	309
12.4.2 Points entiers dans les polytopes	311
12.4.3 Espèces, classes combinatoires décomposables	312

V	Utilisation avancée	315
VI	Informatique théorique	317
VII	Solutions des exercices	319
12.5	Prise en main de Sage	321
12.5.1	Analyse et algèbre avec Sage	321
12.5.2	Programmation	331
12.5.3	Graphiques	331
12.6	Algèbre linéaire numérique	336
12.7	Équations non linéaires	336
12.8	Corps finis et théorie des nombres	341
12.9	Algèbre linéaire	346
12.10	Équations différentielles	348